תכנון ליניארי

מצגת הסבר – מהסיפור ועד הרווח המקסימלי

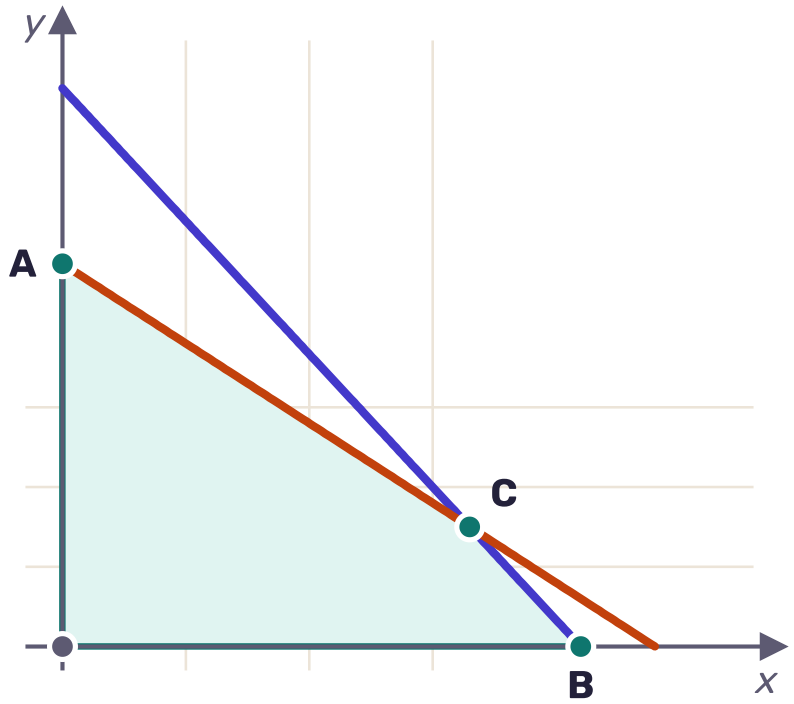
מתמטיקה 3 יח״ל | שאלון 35372 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בשאלה יש **שני סוגים** של מוצרים (או פריטים), ויש **הגבלות**. צריך למצוא כמה מכל סוג כדי שהרווח יהיה הכי גדול (או המחיר הכי קטן).

1. לכתוב את **האילוצים**
2. לסרטט את **התחום האפשרי**
3. למצוא את **הקודקודים** של התחום
4. לכתוב את **פונקציית המטרה** $f(x,y)$
5. להציב את הקודקודים ← מקסימום או מינימום



התחום האפשרי – שקית סוכריות, קיץ תשפ"ו

בנוסחאון של 3 יח"ל אין נוסחה לנושא הזה. כל מה שצריך: לסרטט ישר, לפתור שתי משוואות ולהציב במחשבון.

המושגים

המשתנים x ו־y

בשאלה כתוב מה הם, למשל: x – מספר סוכריות הטופי בשקית, y – מספר סוכריות הגומי.

אילוץ

הגבלה מהסיפור, שנכתבת כ**אי־שוויון**: $5x + 3y \leq 210$

התחום האפשרי

כל הנקודות שמקיימות את **כל** האילוצים. בסרטוט – השטח הצבוע.

פונקציית המטרה

מה שרוצים להגדיל או להקטין (רווח, מחיר):
$f(x, y) = 0.5x + 0.4y$

הכלל החשוב

הערך המקסימלי (או המינימלי) של פונקציית המטרה מתקבל תמיד באחד מ**קודקודי** התחום.

שלב 1: מהסיפור לאילוצים

מה כתוב בשאלה	הסימן
„לכל היותר", „לא יותר מ־", „המקסימום הוא"	$\leq$
„לפחות", „לא פחות מ־", „המינימום הוא"	$\geq$
מספר מוצרים לא יכול להיות שלילי	$x \geq 0,\ \ y \geq 0$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

סוכריית טופי שוקלת 5 גרם וסוכריית גומי 3 גרם. משקל השקית **לכל היותר** 210 גרם, ובשקית **לכל היותר** 48 סוכריות.

משקל: x סוכריות טופי שוקלות $5x$ גרם, y סוכריות גומי שוקלות $3y$ גרם:

$$5x + 3y \leq 210$$

מספר הסוכריות:

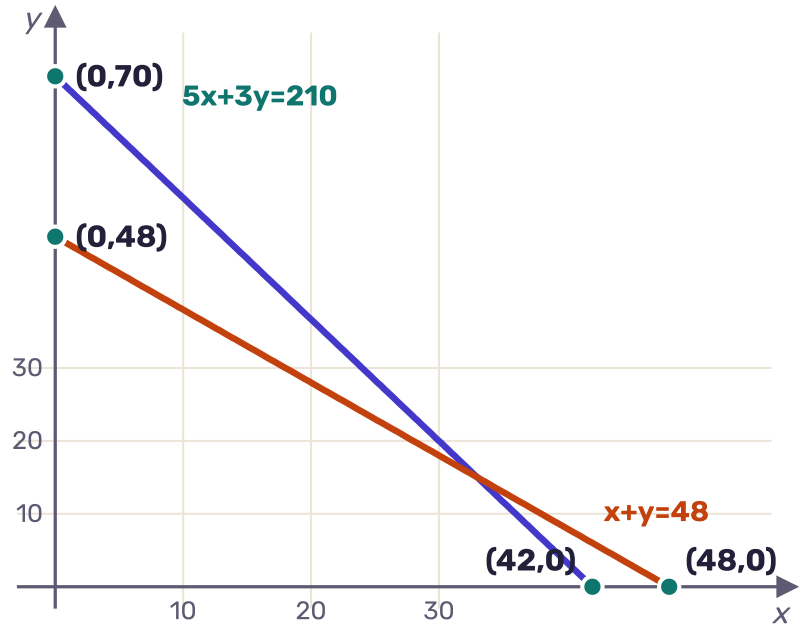
$$x + y \leq 48$$

ועוד: $x \geq 0,\ y \geq 0$

שלב 2: סרטוט ישר – נקודות החיתוך עם הצירים

1. הופכים את האילוץ למשוואה ($\leq \leftarrow =$).
2. מציבים $x = 0 \leftarrow$ מוצאים y: החיתוך עם ציר ה־y.
3. מציבים $y = 0 \leftarrow$ מוצאים x: החיתוך עם ציר ה־x.
4. מעבירים ישר דרך שתי הנקודות.

הישר	$x = 0$	$y = 0$
$5x + 3y = 210$	$(0, 70) \leftarrow 3y = 210$	$(42, 0) \leftarrow 5x = 210$
$x + y = 48$	$(0, 48)$	$(48, 0)$



שלב 3: התחום האפשרי – מתחת או מעל?

$\leq$ ← התחום **מתחת** לישר (לכיוון הראשית).

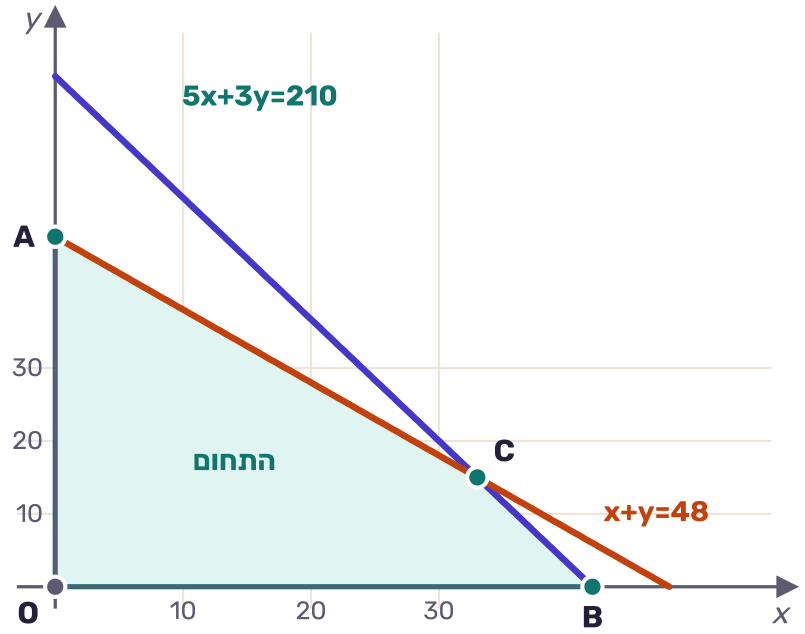
$\geq$ ← התחום **מעל** לישר.

בדיקה עם $(0,0)$

מציבים $x=0,\ y=0$ באילוץ. אם מתקיים – הראשית בתחום, והתחום בצד שלה.

$5\cdot 0+3\cdot 0=0\leq 210$ ✓ ← מתחת לישר

עם $x\geq 0,\ y\geq 0$ התחום נמצא ברביע הראשון. התחום האפשרי = השטח שמקיים את **כל** האילוצים יחד.



שלב 4: הקודקודים של התחום

קודקודים על הצירים

על ציר ה־y התחום נגמר בנקודה **הנמוכה** יותר מבין $(0,70)$ ו־$(0,48)$:

$$A(0,48)$$

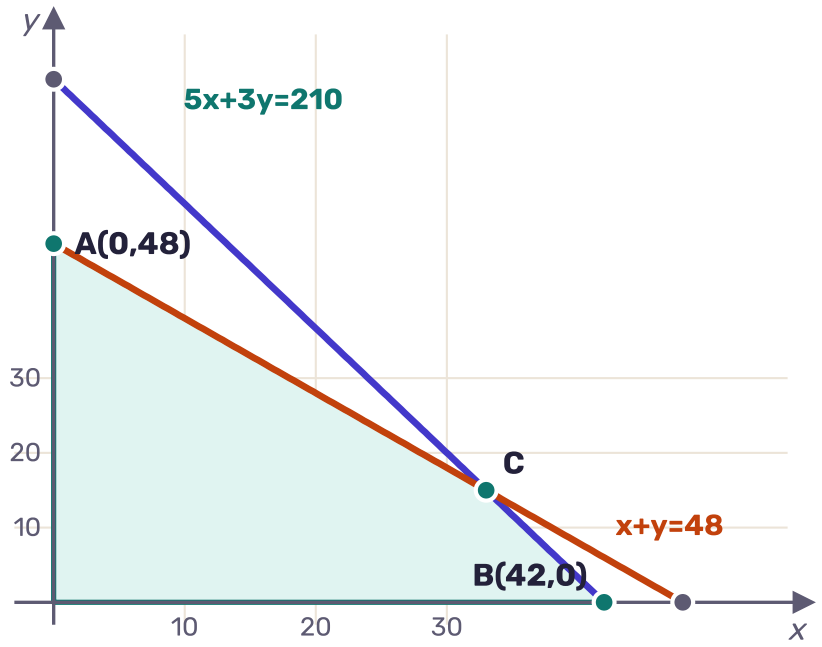
על ציר ה־x – בנקודה **הקרובה** יותר לראשית מבין $(42,0)$ ו־$(48,0)$:

$$B(42,0)$$

(כך כשהאילוצים הם $\leq$. תמיד בודקים מול הסרטוט.)

קודקוד שהוא חיתוך של שני ישרים

C – פותרים את שתי המשוואות יחד, **בשיטת השוואת מקדמים** (השקף הבא).



שלב 5: נקודת חיתוך – שיטת השוואת מקדמים

1. כותבים את שתי משוואות הישרים זו מתחת לזו.
2. כופלים משוואה (או שתיהן) במספר, כך שהמקדם של y (או של x) יהיה **שווה** בשתיהן.
3. מחסירים את המשוואות – y נעלם ונשאר רק x.
4. מציבים את x באחת המשוואות ומוצאים את y.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

$$\begin{cases} 5x+3y=210 \\ x+y=48 \quad /\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+3y=210 \\ 3x+3y=144 \end{cases}$$

מחסירים את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$2x=66 \;\Rightarrow\; x=33$$

$$33+y=48 \;\Rightarrow\; y=15$$

$$C(33,15)$$

בדיקה מהירה: מציבים את C בשתי המשוואות. $5\cdot 33+3\cdot 15=165+45=210$ ✓ $33+15=48$ ✓

שלב 6: פונקציית המטרה וטבלת הקודקודים

הרווח מסוכריית טופי 0.5 ש"ח ומסוכריית גומי 0.4 ש"ח. הרווח משקית:

$$f(x,y) = 0.5x + 0.4y$$

מציבים **כל** קודקוד בפונקציית המטרה, ובוחרים את הערך הגדול ביותר (במקסימום) או הקטן ביותר (במינימום).

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

קודקוד	$f = 0.5x + 0.4y$
$O(0,0)$	0
$B(42,0)$	$0.5 \cdot 42 = 21$
$C(33,15)$	$0.5 \cdot 33 + 0.4 \cdot 15$ $= 16.5 + 6 = \mathbf{22.5}$
$A(0,48)$	$0.4 \cdot 48 = 19.2$

רווח מקסימלי 22.5 ש"ח: 33 סוכריות טופי ו־15 סוכריות גומי

שימו לב: עונים במילים מה צריך לייצר (כמה מכל סוג), ולא רק את הנקודה.

כשמחפשים מינימום ויש אילוץ $\geq$

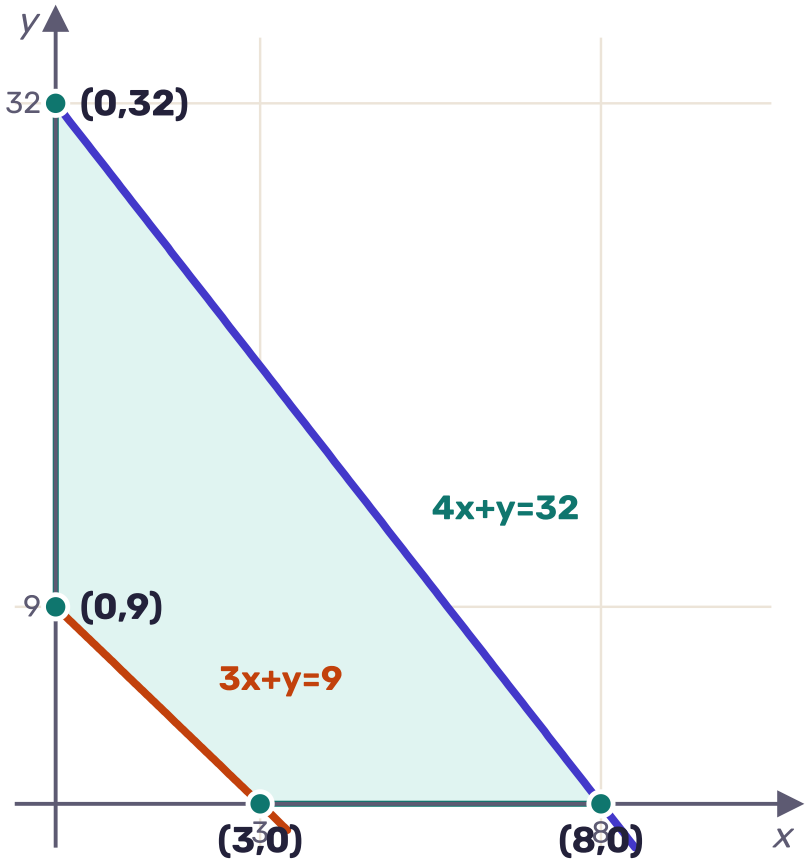
בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 2

רונן אוכל x מנות בשר ו־y מנות סלט ביום.
קלוריות – לכל היותר: $4x+y\leq 32$
חלבון – לפחות: $3x+y\geq 9$
המחיר: $f(x,y)=26x+12y$ – רוצים מחיר **מינימלי**.

$3x+y\geq 9$ ← התחום **מעל** הישר.
בדיקה: בנקודה $(0,0)$ יוצא $0\geq 9$ – לא נכון, ולכן הראשית לא בתחום.

קודקוד	$f=26x+12y$
$(3,0)$	$26\cdot 3=\mathbf{78}$
$(8,0)$	$26\cdot 8=208$
$(0,32)$	$12\cdot 32=384$
$(0,9)$	$12\cdot 9=108$

מחיר מינימלי 78 ש"ח: 3 מנות בשר ו־0 מנות סלט



התחום בין שני הישרים – „רצועה"

האם הנקודה בתחום? בדיקת כל האילוצים

1. מציבים את הנקודה **בכל** אחד מהאילוצים.
2. אם כל האילוצים מתקיימים – הנקודה בתחום, והאפשרות קיימת.
3. אם **אפילו אילוץ אחד** לא מתקיים – זה לא ייתכן.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

האילוצים:

$$150x + 50y \leq 1500 \qquad x + y \leq 20$$

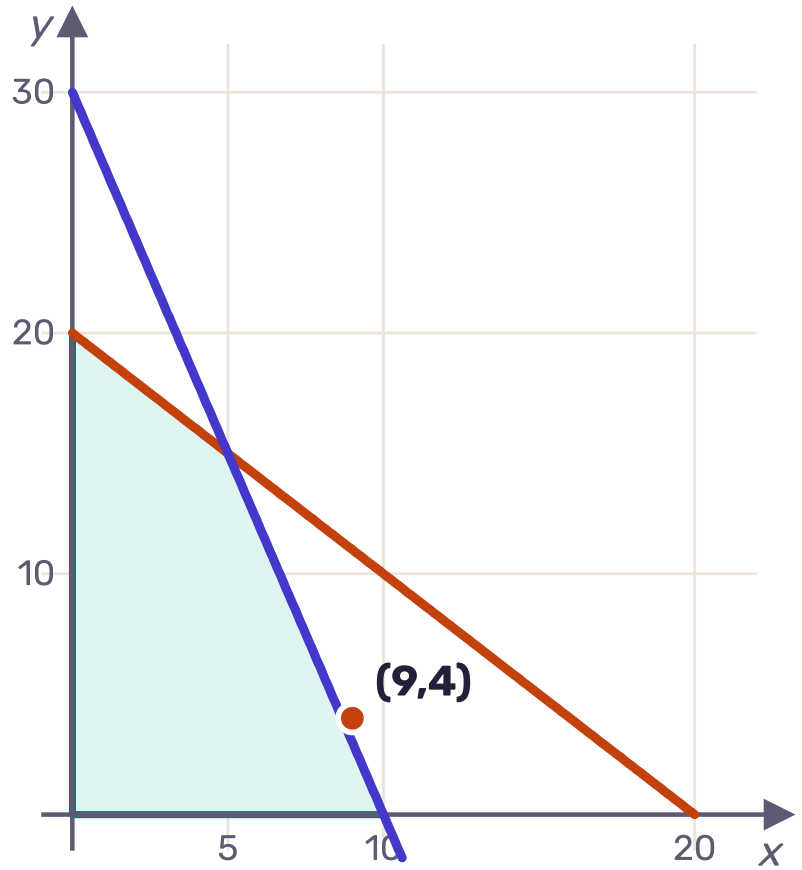
האם ייתכן מארז עם 9 חפיסות שוקולד ו־4 חטיפים?

מספר הפריטים: $9 + 4 = 13 \leq 20$ ✓

המשקל: $150 \cdot 9 + 50 \cdot 4 = 1350 + 200$

$= 1550 > 1500$ ✗

לא ייתכן: המשקל יהיה 1,550 גרם, יותר מ־1,500



$(9, 4)$ מחוץ לתחום

שאלת בגרות פתורה (חלק א)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

מארזי שי עם חפיסות שוקולד (x) וחטיפים (y). חפיסה שוקלת 150 גרם וחטיף 50 גרם. בכל מארז לכל היותר 20 פריטים, ומשקל המארז לכל היותר 1,500 גרם.

א מערכת האילוצים:

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad 150x + 50y \leq 1500 \qquad x + y \leq 20$$

ב

הישר	חיתוך עם ציר y	חיתוך עם ציר x
$x + y = 20$	$(0, 20)$	$(20, 0)$
$150x + 50y = 1500$	$(0, 30)$	$(10, 0)$

על ציר ה־y – הנקודה הנמוכה: $A(0, 20)$

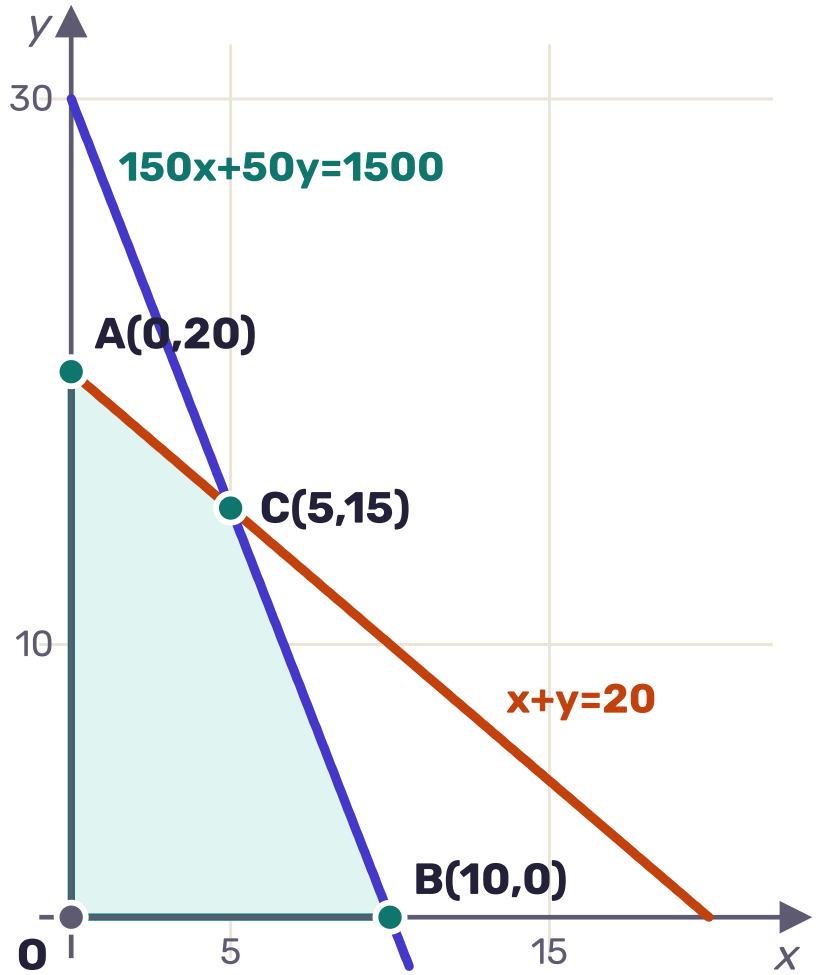
על ציר ה־x – הנקודה הקרובה: $B(10, 0)$

C – השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 150x + 50y = 1500 \\ x + y = 20 \ \ / \cdot 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 150x + 50y = 1500 \\ 50x + 50y = 1000 \end{cases}$$

$$100x = 500 \Rightarrow x = 5 \qquad 5 + y = 20 \Rightarrow y = 15$$

$$A(0, 20),\ B(10, 0),\ C(5, 15)$$



שאלת בגרות פתורה (חלק ב)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

ג הרווח מחפיסה 4 ש"ח ומחטיף 3 ש"ח. פונקציית המטרה:

$$f(x,y)=4x+3y$$

ד מציבים את הקודקודים:

קודקוד	$f=4x+3y$
$O(0,0)$	0
$B(10,0)$	$4\cdot 10=40$
$C(5,15)$	$4\cdot 5+3\cdot 15=20+45=\mathbf{65}$
$A(0,20)$	$3\cdot 20=60$

(1) 5 חפיסות שוקולד ו־15 חטיפים

(2) הרווח המקסימלי: 65 ש"ח

ה 9 חפיסות ו־4 חטיפים? ראינו:

$$150\cdot 9+50\cdot 4=1550>1500$$

לא ייתכן – אילוץ המשקל לא מתקיים

שימו לב: ב־A יש הכי הרבה פריטים, ובכל זאת המקסימום הוא ב־C. לכן תמיד בודקים את **כל** הקודקודים.

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. **„לכל היותר"** הוא $\leq$, ו**„לפחות"** הוא $\geq$.
2. **לא לשכוח** $x \geq 0,\ y \geq 0$.
3. **חיתוך עם ציר:** מציבים 0 במשתנה **השני**.
4. **קודקוד על ציר:** בוחרים את הנקודה של התחום (לפי הסרטוט), לא כל נקודת חיתוך.
5. **בהשוואת מקדמים** כופלים את **כל** המשוואה – כל האיברים, גם המספר שבאגף ימין.
6. **מציבים בפונקציית המטרה את כל הקודקודים** – גם $O(0,0)$ אם הוא בתחום.
7. **מקסימום או מינימום?** רווח ← מקסימום, מחיר או הוצאה ← מינימום.
8. **תשובה במילים:** „5 חפיסות ו־15 חטיפים, רווח 65 ש"ח".

בדיקה עצמית

נתונים האילוצים:

$$y \geq 0 \qquad x \geq 0 \qquad 3x + y \leq 18 \qquad x + 2y \leq 16$$

ופונקציית המטרה: $f(x, y) = 2x + 3y$

1. מצאו את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים.
2. מהם הקודקודים של התחום שעל הצירים?
3. מצאו את נקודת החיתוך של שני הישרים.
4. באיזה קודקוד f מקסימלית? מה הערך?
5. האם הנקודה $(5, 5)$ בתחום?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. הישר הראשון: $(0, 8)$ וגם $(16, 0)$
הישר השני: $(0, 18)$ וגם $(6, 0)$

2. $(0, 8)$ וגם $(6, 0)$ (ובנוסף הראשית O)

3. כופלים את הראשונה ב־3 ומחסירים:

$$5y = 30 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 4 \leftarrow (4, 6)$$

4. $f(6, 0) = 12 \quad f(4, 6) = 26$
$f(0, 8) = 24$
מקסימום: 26, בנקודה $(4, 6)$

5. $5 + 2 \cdot 5 = 15 \leq 16$ ✓
$3 \cdot 5 + 5 = 20 > 18$ ✗ ← **לא בתחום**

לתרגול: באתר יש 17 שאלות בגרות בתכנון ליניארי, עם פתרון מלא ופתרון וידאו.